19-11-20.

- **Εξισώσεις Euler. (σελ. 105).**

$x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = 0, \ x>0.$

Για $t=\log x$, η εξίσωση Euler μετασχηματίζεται σε μία εξίσωση με σταθερούς συντελεστές:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d(\log x)}{dx} = \frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dy}{dx}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dt}\right) = \frac{-1}{x^2}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) =$$

$$= \frac{-1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{-1}{x^2}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{1}{x}$$

$$t=\log x: \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt} \Rightarrow x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}$$

$$\rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^2}\left(-\frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2}\right) \rightarrow x^2\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\rightarrow \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{x^3}\left(2\cdot\frac{dy}{dt} - 3\cdot\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{d^3y}{dt^3}\right) \rightarrow \frac{x^3 d^3y}{dx^3} = 2\cdot\frac{dy}{dt} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{d^3y}{dt^3}$$

Άσκηση 6i, σελ. 114.: Να επιλυθεί η εξίσωση $x^2y'' - xy' + y = 0, \ x>0$ (*)

Λύση: Για $t=\log x$, έχουμε:

$$x\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}, \quad x^2\cdot\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2}$$

Και η εξίσωση γράφεται:

$$0 = -\frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + y = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{2dy}{dt} + y$$

με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

και βασικό σύνολο λύσεων το: $\{e^t, te^t \mid t\in\mathbb{R}\}$.

Επομένως, ένα βασικό σύνολο λύσεων της εξίσωσης (*) είναι το:

$S: \{y_1(x) = x, \ y_2(x) = x\log x, \ x>0\}$

Άσκηση 7i, σελ. 114: Να επιλυθεί το π.α.τ. $x^2y'' - xy' + y = 0$ με $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.

Λύση: Αν $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, $x > 0$ με $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x \cdot \log x$. είναι η ζητούμενη λύση τότε:

$y(x) = c_1 x + c_2 \cdot x \cdot \log x \Rightarrow 1 = y(1) = c_1$.

$y'(x) = c_1 + c_2(1 + \log x) \Rightarrow 0 = y'(1) = c_1 + c_2$.

- **Γραμμικά Διαφορικά Συστήματα Με Σταθερούς Συντελεστές.**

$$(s): \begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1,n-1}y_{n-1} + a_{1n}y_n + b_1. \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2,n-1}y_{n-1} + a_{2n}y_n + b_2. \\ \dots \qquad \dots\dots \\ y_{n-1}' = a_{n-1,1}y_1 + a_{n-1,2}y_2 + \dots + a_{n-1,n-1}y_{n-1} + a_{n-1,n}y_n + b_{n-1}. \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{n,n-1}y_n + a_{nn}y_n + b_n. \end{cases}$$

Ομογενή Συστήματα: $b_1 = 0 = b_2 = \dots = b_n$.

Επίλυση με τη μέθοδο της απαλοιφής:

- Παραγώγιση εξισώσεων → αντικαταστάσεις → γ.δ.ε. με μία άγνωστη συνάρτηση και σταθερούς συντελεστές.
- Επίλυση της εξίσωσης.
- Εύρεση λύσεων.

Πx Παράδειγμα 1, σελ. 207: Να επιλυθεί το σύστημα $\begin{cases} y_1' = y_1 + 12y_2 \\ y_2' = 3y_1 + y_2. \end{cases}$

Λύση: Έχουμε $y_2'' = 3y_1' + y_2' = 3(y_1 + 12y_2) + (3y_1 + y_2) = 6y_1 + 37y_2$.

και: $\begin{cases} y_2' = 3y_1 + y_2 \\ y_2'' = 6y_1 + 37y_2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2y_2' = -6y_1 - 2y_2 \\ y_2'' = 6y_1 + 37y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2y_2' = -6y_1 - 2y_2. \\ y_2'' - 2y_2' = 35y_2. \end{cases}$

απ' όπου $y_2'' - 2y_2' - 35y_2 = 0$

$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 35 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = -5$.

με $y_2(t)=c_1\cdot e^{7t}+c_2\cdot e^{-5t}, t\in\mathbb{R}$.
Από την δεύτερη εξίσωση του συστήματος βρίσκουμε:
$y_2'=3y_1+y_2$
$\Rightarrow 3y_1=y_2'-y_2$
$\Rightarrow 3y_1=7c_1\cdot e^{7t}-5\cdot c_2\cdot e^{-5t}-(c_1\cdot e^{7t}+c_2\cdot e^{-5t})$.
Οι λύσεις του συστήματος δίνονται από τους τύπους:
$(y_1(t),y_2(t))=(2\cdot c_1\cdot e^{7t}-2\cdot c_2\cdot e^{-5t}, c_1\cdot e^{7t}+c_2\cdot e^{-5t}), t\in\mathbb{R}\ (c_1,c_2\in\mathbb{R})$.

Πχ Άσκηση 1, σελ. 212-213: (Υποδείξεις)

(i) $\begin{cases} y_1'=-y_1 \\ y_2'=-y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1=c_1\cdot e^{-t} \\ y_2=c_2\cdot e^{-t} \end{cases} \Rightarrow (y_1(t),y_2(t))=(c_1\cdot e^{-t}, c_2\cdot e^{-t})$.

(iii) $\begin{cases} y_1'=y_1-y_2 \\ y_2'=-y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1'=y_1-y_2 \\ y_2=c_2\cdot e^{-t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1'-y_1=-c_2\cdot e^{-t} \\ y_2=c_2\cdot e^{-t} \end{cases}$

Άσκηση 2(iii), σελ. 213: (Υποδείξεις)

$\begin{cases} y_1'=y_1+y_2+y_3 \\ y_2'=y_2-y_3 \\ y_3'=-y_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1'=y_1+y_2+y_3 \\ y_2'=y_2-y_3 \\ y_3=c_3\cdot e^{-t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1'=y_1+y_2+y_3 \\ y_2'-y_2=-c_3\cdot e^{-t} \\ y_3=c_3\cdot e^{-t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1'=y_1+y_2+y_3 \\ y_2=c_2\cdot e^{t}+\frac{c_3}{2}e^{-t} \\ y_3=c_3\cdot e^{-t}. \end{cases}$

Άσκηση 4(i), σελ. 213: Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών:
$y_1'=y_2,\ y_2'=-2y_1+3y_2,\ y_1(0)=1,\ y_2(0)=3$.
Λύση: Έχουμε:

$\begin{cases} y_1'=y_2 \\ y_2'=-2y_1+3y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1'=y_2 \\ y_2''=-2y_1'+3y_2' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1'=y_2 \\ y_2''=-2y_2+3y_2' \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} y_1'=y_2 \\ y_2''-3y_2'+2y_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1'=y_2 \\ y_2=c_1\cdot e^{t}+c_2\cdot e^{2t} \end{cases}$

$y_1(t)=c_1\cdot e^{t}+\frac{c_2}{2}e^{2t},\ y_2(t)=c_1\cdot e^{t}+c_2\cdot e^{2t}$

$1=y_1(0)=c_1+\frac{c_2}{2},\ 3=y_2(0)=c_1+c_2$.

(Με γραφίδα από εδώ και κάτω):

Άσκηση 2i, σελ. 213: Να επιλυθεί το:

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= 5y_1+2y_2+2y_3 \\ y_2' &= 2y_1+2y_2+(-4)y_3 \\ y_3' &= 2y_1+(-4)y_2+2y_3 \end{aligned}\right| \; 3\times 3. \quad (1)$$

Λύση: $y_3'' = 2y_1' - 4y_2' + 2y_3' =$

$$= 2(5y_1+2y_2+2y_3)-4(2y_1+2y_2-4y_3)+2(2y_1-4y_2+2y_3)$$

$\Rightarrow y_3'' = 6y_1-12y_2+24y_3 \quad (2)$

$\Rightarrow y_3''' = 6y_1'-12y_2'+24y_3' =$

$$= 6(5y_1+2y_2+2y_3)-12(2y_1+2y_2-4y_3)+24(2y_1-4y_2+2y_3)$$
$$= 54y_1+(12-24-96)y_2+(12+48+48)y_3.$$

$\Rightarrow y_3''' = 54y_1-108y_2+108y_3. \quad (3)$

Από (1),(2),(3):

$$\begin{aligned} 2y_1-4y_2+2y_3 &= y_3' \quad \boxed{-3}, \boxed{-27} \\ 6y_1-12y_2+24y_3 &= y_3'' \\ 54y_1-108y_2+108y_3 &= y_3''' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2y_1-4y_2+2y_3 &= y_3' \\ 18y_3 &= y_3'' \\ 54y_3 &= y_3''' \end{aligned}$$

$18y_3 = y_3''$ → από εδώ έχουμε το $\boxed{y_3}$

$$\begin{aligned} 2y_1-4y_2 &= y_3'-2y_3 \quad \boxed{-27} \\ 54y_1-108y_2 &= y_3'''-108y_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2y_1-4y_2 &= y_3'-2y_3 \\ 0 &= y_3'-2y_3+(-27y_3'+54y_3) = -26y_3'+52y_3 \end{aligned}$$

$\Rightarrow 52y_3-26y_3' = 0$

$\Rightarrow 52y_3 = 26y_3'$

Επίσης, έχουμε ότι $18y_3 = y_3'''$.

Συνεχίζοντας, βρίσκουμε την λύση.

(Πχ) Παράδειγμα 3, σελ. 209: Να επιλυθεί το παρακάτω:

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= y_1 - y_2 - y_3 \\ y_2' &= y_1 + 3y_2 + y_3 \\ y_3' &= -3y_1 + y_2 - y_3 \end{aligned}\right| \begin{aligned} &(1). \\ &3\times 3. \end{aligned}$$

Λύση: $y_1'' = y_1' - y_2' - y_3'$

$y_1'' = (y_1 - y_2 - y_3) - (y_1 + 3y_2 + y_3) - (-3y_1 + y_2 - y_3)$

$\Rightarrow y_1'' = 3y_1 - 5y_2 - y_3$ (2).

$y_1''' = 3y_1' - 5y_2' - y_3' =$

$= 3(y_1 - y_2 - y_3) - 5(y_1 + 3y_2 + y_3) - (-3y_1 + y_2 - y_3)$

$\Rightarrow y_1''' = y_1 - 19y_2 - 7y_3$. (3).

Από (1),(2),(3), έχουμε:

$y_1 - y_2 - y_3 = y_1'$ $\boxed{-1}$, $\boxed{-7}$

$3y_1 - 5y_2 - y_3 = y_1''$

$y_1 - 19y_2 - 7y_3 = y_1'''$

$$\left.\begin{aligned} y_1 - y_2 - y_3 &= y_1' \\ 2y_1 - 4y_2 \quad &= y_1'' - y_1' \quad \boxed{-3} \\ -6y_1 - 12y_2 \quad &= y_1''' - 7y_1' \end{aligned}\right\} \Rightarrow -12y_1 = y_1''' - 7y_1' - 3y_1'' + 3y_1'$$

Οπότε, έχουμε: $y_1''' - 3y_1'' - 4y_1' + 12y_1 = 0$

Επομένως: $\lambda^3 - 3\lambda^2 - 4\lambda + 12 = 0$

$\Rightarrow \lambda^2(\lambda - 3) - 4(\lambda - 3) = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -2.$

Παίρνουμε την (1): $-y_2 - y_3 = y_1' - y_1$ (4).

Παίρνουμε την (2): $-5y_2 - y_3 = y_1'' - 3y_1$ (5).

Από (4),(5), έχουμε:

$-y_2 - y_3 = y_1' - y_1$ $\boxed{-1}$

$-5y_2 - y_3 = y_1'' - 3y_1$

$-y_2 - y_3 = y_1' - y_1$
$-4y_2 \quad = y_1'' - 3y_1 - y_1' + y_1$

$\Rightarrow -y_2 - y_3 = y_1' - y_1$
$\quad -4y_2 \quad = y_1'' - y_1' - 2y_1 \rightarrow$ από εδώ έχουμε την y_2.

Συνεχίζοντας, βρίσκουμε το αποτέλεσμα.

Άσκηση Β-30: (Υπόδειξη)
$a_n y^{(n)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0 \ (E_0)$, $a_i \in C^1[x_0, +\infty)$, $\forall y, \ldots, y^{(n-1)}$ φραγμένα

Άσκηση Β-43: (Υπόδειξη).
$y'' - 2by' + cy = 0$, $b, c \in \mathbb{R}$